Feuille n°1 : Variable Complexe

Exercice 1 : **Résolution des équations**

$$\cos z = 3$$

Indication : utiliser la définition de $\cos z$ et en déduire une équation du second degré vérifiée par $Z = e^{iz}$. Déterminer Z, déterminer son module et son argument et en déduire z.

Exercice 2 : **Etude des déterminations de la "fonction multiforme"**

$$\varphi(z) = arctg\sqrt{1-z}$$

Domaine de définition de φ

On décompose φ sous la forme $\varphi = f \circ g \circ h$ avec $h(z) = \sqrt{1-z}$, $g(z) = \frac{i-z}{i+z}$ et $f(z) = \frac{1}{2i}\log z$. Définir la détermination de f qui admet pour coupure la demi-droite $]-\infty, 0]$ et qui prend des valeurs imaginaires pures sur la demi-droite $]0, +\infty[$. Avec cette définition de f, on doit avoir $g[h(z)] \notin]-\infty, 0]$. En posant $u = h(z)$, montrer que $g(u) \in]-\infty, 0] \Leftrightarrow u_1 = 0$ et $u_2 \geq 1$ avec $u = u_1 + iu_2$. Définir la détermination de $h(z)$ qui admet pour coupure $[1, +\infty[$ prenant la valeur 1 en $z = 0$. Montrer qu'avec les déterminations précédentes, le domaine de définition de φ est le plan complexe privé de la demi-droite $[2, +\infty[$.

Détermination de $\varphi(1+i)$

Montrer qu'avec les déterminations précédentes, on a

$$\varphi(1+i) = \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Exercice 3 : **Conditions de Cauchy et dérivabilité**

Soit la fonction définie par

$$f(z) = \sqrt{|xy|}$$

avec $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$. Montrer que les conditions de Cauchy sont vérifiées pour la fonction f au point $z = 0$. Montrer que la fonction f n'est pas dérivable en $z = 0$ (on pourra calculer $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{f(z) - f(0)}{z - 0}$ lorsque $y = x > 0$ et lorsque $y = x < 0$). Commentaires.