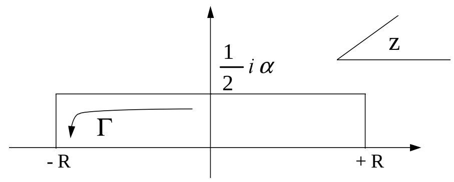
Feuille n°2 : Variable Complexe

Exercice 1 : En appliquant le théorème de Cauchy à la fonction e^{-z^2} sur le contour Γ ci-contre, calculer la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(\alpha x)\, dx$$



Exercice 2 :

1) On désire calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_\Gamma \frac{dz}{z-a}$$

pour différents contours Γ.

a) Calculer I lorsque Γ est un cercle de centre a et de rayon r (on pourra utiliser le paramètrage $z - a = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$).

b) On considère un contour Γ' contenant Γ et on note D' et D les domaines du plan complexe dont les frontières sont Γ' et Γ (D est le disque de centre a et de rayon r). Appliquer le théorème de Cauchy à la fonction $\dfrac{1}{z-a}$ sur $D' \backslash D$. En déduire $\int_{\Gamma'} \frac{dz}{z-a}$ lorsque Γ' est un contour entourant le point $z = a$.

c) Déterminer I lorsque Γ est un contour n'entourant pas le point $z = a$.

2) Après avoir effectué une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $f(z) = \dfrac{3z-2}{z^2-z}$ et en utilisant les résultats de la question 1), déterminer

$$\int_\Gamma f(z) dz$$

lorsque Γ est un contour entourant les points $z = 0$ et $z = 1$.

Exercice 3 :

1) Soit D un domaine simplement connexe dont la frontière est notée Γ. On suppose que f est une fonction holomorphe sur D et continue sur Γ. Soit $a \in D$ et $h \in \mathbb{C}$ tel que $a + h \in D$. Rappeler l'expression de $f(a)$ et de $f(a+h)$ en fonction d'intégrales calculées le long de la frontière Γ. En déduire

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

Indication : on pourra étudier

$$g(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

et remplacer $f(a)$ et $f(a+h)$ par leurs expressions intégrales.

2) En déduire la valeur de

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{2z}}{(z+1)^2} dz$$

où Γ est un contour contenant le point $z = -1$.