Feuille n°2 : Variable Complexe

Exercice 1 :

On découpe l'intégrale en quatre morceaux correspondant aux quatre segments de droite :
Intégrale 1 : $z = x \in [-R, +R]$. Lorsque $R \to \infty$, on obtient $I_1 = \sqrt{\pi}$,
Intégrale 2 : $z = R + iy, y \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right]$. Lorsque $R \to \infty$, on obtient $I_2 = 0$,
Intégrale 3 : $z = -R + iy, y \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right]$. Lorsque $R \to \infty$, on obtient $I_3 = 0$,
Intégrale 4 : $z = x + \frac{1}{2}i\alpha, x \in [-R, +R]$. Lorsque $R \to \infty$, on obtient
$I_4 = -e^{\alpha^2/4}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos(\alpha x)\, dx - i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\sin(\alpha x)\, dx\right]$,
d'où

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(\alpha x)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha^2/4}$$

Exercice 2 :

1) a) $\int_\Gamma \frac{dz}{z-a} = 2i\pi$ b) $\int_{\Gamma'} \frac{dz}{z-a} = 2i\pi$ c) $\int_\Gamma \frac{dz}{z-a} = 0$
2) $f(z) = \frac{2}{z} + \frac{1}{z-1}$ et $\int_\Gamma f(z)dz = 6i\pi$

Exercice 3 :

1) On a

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)(z-a-h)}dz \underset{h\to 0}{\to} \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

2) En utilisant $f'(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$ avec $a = -1$ et $f(z) = e^{2z}$, on trouve

$$\int_\Gamma \frac{e^{2z}}{(z+1)^2}dz = \frac{4i\pi}{e^2}$$