Feuille n°3 : Variable Complexe

Exercice 1 : Calculer le développement de Laurent de $f\left(z\right)=\dfrac{1}{\left(1+z^2\right)^4}$ au voisinage de $z=i$. En déduire, en utilisant la méthode des résidus, la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^4}$$

Exercice 2 : Calculer l'intégrale :

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{Lnx}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx$$

en appliquant le théorème des résidus à la fonction

$$f(z)=\frac{\log z}{\left(1+z^2\right)^2}$$

sur le demi cercle centré sur l'origine de rayon R fermé par les deux intervalles $[-R,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,R]$ et par le demi cercle de rayon ε centré sur l'origine qui exclut le point $z=0$.

Exercice 3 : En utilisant la fonction auxiliaire $\varphi\left(z\right)=\dfrac{\pi}{tg\pi z}$, calculer la somme de la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(2n+1\right)^2}$$

Retrouver le résultat en utilisant $f\left(z\right)=\dfrac{1}{z^2}$ et $\psi\left(z\right)=\dfrac{\pi}{2}tg\left(\dfrac{\pi}{2}z\right)$.