INP ENSEEIHT

Feuille n°3 : Variable Complexe

Exercice 1 :
On fait un développement de Taylor de

$$\varphi(z) = (z-i)^4 f(z) = \frac{1}{(z+i)^4}$$

au voisinage de $z = i$, c'est-à-dire en posant $u = z - i$, de

$$\phi(u) = \frac{1}{(u+2i)^4} = \frac{1}{16}\left(1 + \frac{u}{2i}\right)^{-4}$$

Après quelques calculs élémentaires, on trouve

$$f(z) = \frac{1}{16(z-i)^4} + \frac{i}{8(z-i)^3} - \frac{5}{32(z-i)^2} - \frac{5i}{32(z-i)} + ...$$

et donc

$$resf(i) = \frac{-5i}{32}$$

On applique le théorème des résidus à la fonction $f(z)$ sur le contour constitué de l'intervalle $[-R, +R]$ que l'on ferme avec le demi cercle supérieur C_R. Le premier lemme de Jordan s'applique de façon évidente sur C_R. On en déduit alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^4} = \frac{5\pi}{32}$$

Exercice 2 :
On applique le thèorème des résidus à la fonction

$$f(z) = \frac{\log z}{(1+z^2)^2}$$

sur le demi cercle centré sur l'origine de rayon R fermé par les deux intervalles $[-R, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, R]$ et par le demi cercle de rayon ε centré sur l'origine qui exclut le point $z = 0$. Le résidu de f au point $z = i$ est

$$resf(i) = \frac{i}{4} + \frac{\pi}{8}$$

Les lemmes de Jordan s'appliquent sans problème sur les deux demi-cercles et on obtient en égalant les parties réelles et imaginaires

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{Lnx}{(1+x^2)^2}\,dx &= -\frac{\pi}{4}\\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Exercice 3 :

On pose

$$f(z) = \frac{1}{(2z+1)^2} \text{et } \varphi(z) = \frac{\pi}{tg \pi z}$$

et on applique le thèorème des résidus à la fonction $f\varphi$ sur le contour carré présenté en cours. Les résidus de $f\varphi$ sont :

$$\begin{aligned} res f\varphi(k) &= f(k) \qquad k \in \mathbb{Z} \\ res f\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) &= -\frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

Puisque $f(n) = \frac{\varepsilon(n)}{n}$, avec $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon(n) = 0$, l'intégrale sur le carré tend vers 0 lorsque n tend vers ∞ et on obtient finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$