Feuille n°4 : Variable Complexe

Exercice 1 :

A partir de $f(z) = \dfrac{e^{i\theta z}}{z^2+1}$ et de la fonction auxiliaire $\varphi(z) = \dfrac{\pi e^{-i\pi z}}{\sin \pi z}$, calculer la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n^2+1}$$

en précisant l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles le résultat s'applique.

Exercice 2 : **Produit Infini d'Euler pour** $\sin(\pi z)$

1) Déterminer les premiers termes du développement de Laurent de $\frac{\cos z}{\sin z}$ au voisinage de $z=0$ de façon à déterminer

$$\lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{\sin z} - \frac{1}{z}$$

Quelles sont les singularités de la fonction $f(z) = \frac{\cos z}{\sin z} - \frac{1}{z}$?

2) Soit u un nombre complexe fixé n'appartenant pas aux contours circulaires C_n définis par $|z| = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, n \in \mathbb{Z}$. Calculer les deux intégrales suivantes

$$\begin{aligned} I_n(u) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{C_n} \frac{f(z)}{z-u}dz \\ I_n(0) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{C_n} \frac{f(z)}{z}dz \end{aligned}$$

avec $f(z) = \frac{\cos z}{\sin z} - \frac{1}{z}$. En remarquant que $\frac{1}{z-u} = \frac{1}{z} + \frac{u}{z(z-u)}$, vérifier que

$$I_n(u) = I_n(0) + J_n(u)$$

avec

$$J_n(u) = \frac{u}{2i\pi}\int_{C_n} \frac{f(z)}{z(z-u)}dz$$

En admettant que $|f(z)| \leq M$, pour tout $z \in C_n$, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} J_n(u) = 0$$

En déduire l'égalité :

$$\frac{\cos u}{\sin u} = \frac{1}{u} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2u}{u^2 - k^2\pi^2}$$

3) On considère la fonction

$$\theta(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Vérifier que

$$\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

Montrer que si deux fonctions θ et ψ sont holomorphes sur un domaine Ω vérifiant $\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} = \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\theta(z) \neq 0$ et $\psi(z) \neq 0$, alors il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $\psi(z) = c\theta(z)$ (on pourra dériver la fonction $\frac{\theta(z)}{\psi(z)}$). En déduire l'égalité

$$\sin(\pi z) = cz \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Déterminer enfin la constante c.