

## Feuille n°4 : Variable Complexe

### Exercice 1 :

On pose  $f(z) = \frac{e^{i\theta z}}{z^2 + 1}$  et  $\varphi(z) = \frac{\pi e^{-i\pi z}}{\sin \pi z}$ , et on applique le théorème des résidus à la fonction  $f\varphi$  sur le cercle  $C_n$  introduit en cours. Les résidus de cette fonction sont :

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f\varphi(k) &= f(k) \quad k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{res} f\varphi(i) &= \frac{\pi e^{-\theta}}{e^{-2\pi} - 1} \\ \operatorname{res} f\varphi(-i) &= \frac{\pi e^{\theta}}{1 - e^{2\pi}} \end{aligned}$$

Lorsque l'intégrale sur le cercle tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $\infty$ , on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n^2 + 1} = -\frac{1}{2} + \frac{\pi \operatorname{ch}(\theta - \pi)}{2 \operatorname{sh} \pi}$$

En étudiant l'intégrale sur  $C_n$ , on montre que les deuxièmes lemmes de Jordan s'appliquent si  $0 < \theta < 2\pi$ .

### Exercice 2 :

1)

$$\frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} + o(z)$$

2) En posant  $g(z) = \frac{f(z)}{z - u}$ , on montre que

$$\begin{aligned} \operatorname{res} g(u) &= f(u) \\ \operatorname{res} g(k\pi) &= \frac{1}{k\pi - u} \end{aligned}$$

et donc

$$I_n(u) = \sum_{k=1}^n \frac{2u}{k^2\pi^2 - u^2} + f(u)$$

De la même façon, on obtient  $I_n(0) = 0$  (ce qui correspond d'ailleurs à ce qu'on obtient en faisant un passage à la limite dans l'expression précédente). En admettant que  $|f(z)| \leq M, \forall z \in C_n$ , on a en posant  $z = r_n e^{i\theta} = (n + \frac{1}{2}) \pi e^{i\theta}$  :

$$|J_n(u)| \leq \frac{|u| M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|r_n e^{i\theta} - u|} \leq \frac{|u| M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r_n - |u|} \leq \frac{|u| M}{r_n - |u|}$$

et donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(u) = 0$ , d'où le résultat recherché :

$$f(u) = \frac{\cos u}{\sin u} - \frac{1}{u} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2u}{u^2 - k^2\pi^2}$$

3) On sait que

$$\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} = \frac{d \log \theta(z)}{dz}$$

donc

$$\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2} = \pi \cot(\pi z)$$

Si deux fonctions  $\theta$  et  $\psi$  sont holomorphes sur un domaine  $\Omega$  vérifiant  $\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} = \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\theta(z) \neq 0$  et  $\psi(z) \neq 0$ , alors

$$\left[ \frac{\theta(z)}{\psi(z)} \right]' = \frac{\theta'\psi - \theta\psi'}{\psi^2} = \frac{\theta}{\psi} \left[ \frac{\theta'}{\theta} - \frac{\psi'}{\psi} \right] = 0$$

Donc  $\frac{\theta(z)}{\psi(z)}$  est une constante c'est-à-dire  $\theta(z) = c\psi(z)$ . On remarque alors qu'avec  $\psi(z) = \sin(\pi z)$ , on a

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = \pi \cot(\pi z)$$

et donc

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = \frac{\theta'(z)}{\theta(z)}$$

En utilisant le résultat précédent, on obtient

$$\psi(z) = \sin(\pi z) = cz \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2} \right)$$

Pour déterminer la constante  $c$ , il suffit d'écrire le résultat précédent sous la forme

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \frac{c}{\pi} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2} \right)$$

et de faire un passage à la limite  $z \rightarrow 0$ , ce qui donne :

$$1 = \frac{c}{\pi} \Leftrightarrow c = \pi$$