Feuille n°5 : Variable Complexe

Exercice 1 :

1) Montrer que la transformée de Laplace de la "dent de scie" définie par :

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t+1) \qquad \forall t \\ f(t) &= \frac{1}{2} - t \qquad t \in [0,1] \end{aligned}$$

est

$$F(p) = -\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2p}\frac{1+e^{-p}}{1-e^{-p}}$$

2) Retrouver l'original par application de la formule d'inversion.

Exercice 2 :

On considère le système d'équations aux dérivées partielles suivant, qui régit les valeurs de la tension et du courant pour un cable de téléphonie "idéal" :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial x}(x,t) &= Ri(x,t) \\ -\frac{\partial i}{\partial x}(x,t) &= C\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \end{aligned}$$

pour $t > 0$ et $x \in]0, L[$, avec les conditions initiales (CI) et les conditions limites (CL) suivantes :

CI	**CL**
$v(x,0) = 0$	$v(0,t) = 1$
$i(x,0) = 0$	$v(L,t) = 0$

1. Montrer que la transformée de Laplace de $v(x,t)$ notée $V(x,p)$ vérifie une équation différentielle du second ordre à coefficients constants que l'on précisera. On notera $V(x,p) = A(p)e^{\alpha x} + B(p)e^{-\alpha x}$ (où α dépend de R, C et p) la solution de cette équation différentielle.

2. En utilisant les conditions aux limites CL, donner le système d'équations vérifié par $A(p)$ et $B(p)$.

3. On admet qu'en utilisant les résultats des questions 1) et 2), on obtient :

$$V(x,p) = \frac{1}{p}\frac{\mathrm{sh}\left[\tau\sqrt{p}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]}{\mathrm{sh}\left[\tau\sqrt{p}\right]} \qquad 0 < x < L$$

   (a) Définir les déterminations de $\sqrt{p}$ et montrer que ces déterminations donnent la même valeur de $V(x,p)$ sur les bords supérieur et inférieur de la coupure. Dans ces conditions, il n'est plus nécessaire de couper le plan complexe et la fonction $V(x,p)$ est définie sur $\mathbb{C}$ privé des points singuliers isolés annulant son dénominateur $D(p) = p\mathrm{sh}\left[\tau\sqrt{p}\right]$.

(b) Déterminer les points singuliers isolés de $V(x,p)$ et les résidus en ces points singuliers isolés.

(c) A l'aide de la formule d'inversion, donner l'expression de $v(x,t)$ sous la forme d'un développement en séries (on admettra que les intégrales sur les parties circulaires du contour de Bromwich tendent vers 0 lorsque le rayon $R \to \infty$).

(d) Déduire des résultats précédents la valeur de :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \qquad 0 < x < L$$

Exercice 3 : **Transformée de Laplace inverse de** $Y(p) = \exp\left(-\sqrt{p}\right)$

1) Montrer que $Y(p)$ vérifie l'équation différentielle

$$4pY''(p) + 2Y'(p) - Y(p) = 0$$

2) Déterminer les transformées de Laplace inverses de $Y'(p), Y''(p)$ et $pY''(p)$ en fonction de $y(t) = TL^{-1}[Y(p)]$ et de $y'(t)$. En déduire une équation différentielle du premier ordre liant $y(t)$ et $y'(t)$.

3) Déterminer $y(t)$ à une constante multiplicative près.