Feuille n°5 : Variable Complexe

Exercice 1 :

1) On cherche la transformée de Laplace du motif élémentaire qui est défini par

$$m(t) = -tu(t) + \frac{1}{2}u(t) + (t-1)\,u(t-1) + \frac{1}{2}u(t-1)$$

à savoir

$$M(p) = \frac{1}{p^2}\left(e^{-p} - 1\right) + \frac{1}{2p}\left(e^{-p} + 1\right)$$

On périodise ce motif pour obtenir

$$TL(f(t)) = F(p) = \frac{M(p)}{1-e^{-p}} = -\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2p}\frac{1+e^{-p}}{1-e^{-p}}$$

2) En faisant un développement de Taylor de $\dfrac{1+e^{-p}}{1-e^{-p}}$ au voisinage de $p=0$, on s'aperçoit que $p=0$ est un point ordinaire de $F(p)$. Les points singuliers de $F(p)$ sont donc les pôles simples $p = 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}$. L'abscisse de convergence de $F(p)$ est donc $x_c = 0$. L'application de la formule d'inversion de la transformée de Laplace donne alors :

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} resG(2ik\pi) \qquad t > 0$$

avec $G(z) = F(z)e^{zt}$ d'où

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k\pi t)}{k\pi} \qquad t > 0$$

On calcule cette série à l'aide du théorème des résidus (voir TD n°2) et on obtient

$$f(t) = \frac{1}{2} - t \qquad 0 < t < 1$$

Puisque la série $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k\pi t)}{k\pi}$ est 2π périodique, on obtient le résultat attendu.

Exercice 2 :

1) A x fixé, on pose $V(x,p) = TL\left[v(x,t)\right]$ et $I(x,p) = TL\left[i(x,t)\right]$. On sait que

$$TL\left[f'(t)\right] = pF(p) - f(0^+)$$

donc

$$TL\left[\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right] = pV(x,p) - v(x,0^+) = pV(x,p)$$

En prenant la transformée de Laplace des équations différentielles liant la tension et le courant, on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V(x,p)}{\partial x} &= RI(x,p) \\ -\frac{\partial I(x,p)}{\partial x} &= CpV(x,p) \end{aligned}$$

d'où l'équation

$$\frac{\partial^2 V(x,p)}{\partial x^2} - RCpV(x,p) = 0$$

On sait résoudre cette équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$V(x,p) = A(p)e^{\sqrt{RCp}x} + B(p)e^{-\sqrt{RCp}x}$$

2) Puisque $v(0,t) = 1$, on a $V(0,p) = \frac{1}{p}$, donc

$$A(p) + B(p) = \frac{1}{p}$$

Puisque $v(L,t) = 0$, on a $V(L,p) = 0$ donc

$$A(p)e^{\sqrt{RCp}L} + B(p)e^{-\sqrt{RCp}L} = 0$$

Quelques calculs élémentaires permettent d'obtenir

$$A(p) = \frac{e^{\tau\sqrt{p}}}{2psh\left(\tau\sqrt{p}\right)} \text{ et } B(p) = -\frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{2psh\left(\tau\sqrt{p}\right)} \text{ avec } \tau = L\sqrt{RC}$$

d'où

$$V(x,p) = \frac{1}{p}\frac{sh\left[\tau\sqrt{p}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]}{sh\left[\tau\sqrt{p}\right]}$$

3) a) Pour définir les déterminations de $\sqrt{p}$, on pose $p = re^{i(\theta+2k\pi)}$ et on obtient :

$$\sqrt{p} = p^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}e^{ik\pi} = (-1)^k\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

On voit donc que les déterminations correspondant à k pair ou k impair sont opposées. Puisque $sh(-x) = sh(x)$, $V(x,p)$ prend les mêmes valeurs pour toutes les déterminations de $\sqrt{p}$. De plus, supposons qu'on choisisse $\theta = 0$ sur la partie supérieure de l'axe des abscisses (notée $p = x + i0$) et $k = 0$. Lorsque $p = x + i0$, on a $\theta = 0$ et donc $\sqrt{p} = \sqrt{x}$. Sur la partie inférieure de l'axe des abscisses ($p = x - i0$), on a $\theta = 0$ et donc $\sqrt{p} = -\sqrt{x}$. Quelle que soit la détermination choisie pour $\sqrt{p}$, on a la même valeur de $V(x,p)$ au dessus et en dessous de la coupure. Donc, il n'est pas nécessaire de couper le plan complexe pour définir $V(x,p)$.

b) Les singularités isolées de $V(x,p)$ sont les racines de $sh\left[\tau\sqrt{p}\right]=0$ et $p=0$, c'est-à-dire

$$p=-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2},k\in\mathbb{N}^*\text{ et }p=0$$

La calcul du résidu de $V(x,p)$ en $p=0$ ne pose pas de problème :

$$\begin{aligned}\text{res}V(0) &= \lim_{p\to0}pV(x,p)\\ &= \lim_{p\to0}\frac{sh\left[\tau\sqrt{p}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]}{sh\left[\tau\sqrt{p}\right]}\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}sh\left[\tau\sqrt{p}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right] &= \tau\sqrt{p}\left(1-\frac{x}{L}\right)+o\left(\sqrt{p}\right)\\ sh\left[\tau\sqrt{p}\right] &= \tau\sqrt{p}+o\left(\sqrt{p}\right)\end{aligned}$$

et par suite

$$\text{res}V(0)=\boxed{1-\frac{x}{L}}$$

Le calcul du résidu en $p=-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}$ peut se faire de deux manières :

- Utilisation de la formule $\frac{P\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right)}{Q'\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right)}$:

  En remarquant que $V(x,p)=\frac{P(x,p)}{Q(x,p)}$ avec $P(x,p)=sh\left[\tau\sqrt{p}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]$ et $Q(x,p)=psh\left[\tau\sqrt{p}\right]$, on a

  $$Q'(x,p)=sh\left[\tau\sqrt{p}\right]+\frac{\tau\sqrt{p}}{2}ch\left[\tau\sqrt{p}\right]$$

  Puisque $p=-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}$ est un pôle d'ordre 1, le résidu en ce point est défini par

  $$\text{res }V\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right)=\frac{P\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right)}{Q'\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right)}$$

  En choisissant la détermination de $\sqrt{p}$ définie précédemment, on a $\sqrt{p}=i\frac{k\pi}{\tau}$ et donc

  $$\begin{aligned}\text{res }V\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right) &= \frac{sh\left[ik\pi\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]}{sh\left[ik\pi\right]+\frac{ik\pi}{2}ch\left[ik\pi\right]}\\ &= \frac{i\sin\left[k\pi\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]}{0+\frac{ik\pi}{2}\cos\left[k\pi\right]}\\ &= \frac{(-1)^{k+1}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)}{\frac{k\pi}{2}(-1)^k}\\ &= \boxed{-\frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)}\end{aligned}$$

- Développement limité

$$\mathrm{res}V\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right)=\lim_{p\to-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\left(p+\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right)V(x,p)$$

En posant $u=p+\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}$, on a

$$\mathrm{res}V\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right)=\lim_{u\to0}\frac{u}{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\frac{sh\left[\tau\sqrt{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]}{sh\left[\tau\sqrt{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\right]}$$

On choisit la détermination de $\sqrt{p}$ telle que $\sqrt{-1}=i$. Alors

$$\begin{aligned}\tau\sqrt{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}} &= \tau i\frac{k\pi}{\tau}\sqrt{1-\frac{u}{\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}}\\ &= ik\pi\left(1-\frac{u\tau^2}{2k^2\pi^2}+o(u)\right)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}sh\left[\tau\sqrt{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\right] &= \frac{1}{2}\left[e^{ik\pi\left(1-\frac{u\tau^2}{2k^2\pi^2}+o(u)\right)}-e^{-ik\pi\left(1-\frac{u\tau^2}{2k^2\pi^2}+o(u)\right)}\right]\\ &= i\sin\left[k\pi\left(1-\frac{u\tau^2}{2k^2\pi^2}+o(u)\right)\right]\end{aligned}$$

Mais $\sin(k\pi-v)=(-1)^{k+1}\sin(v)$, donc

$$sh\left[\tau\sqrt{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\right]=i\,(-1)^{k+1}\sin\left[k\pi\left(\frac{u\tau^2}{2k^2\pi^2}+o(u)\right)\right]$$

Il vient alors

$$\frac{u}{sh\left[\tau\sqrt{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\right]}\underset{u\to0}{\longrightarrow}\boxed{\frac{1}{i}\frac{2k^2\pi^2}{k\pi\tau^2}(-1)^{k+1}}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\lim_{u\to0}sh\left[\tau\sqrt{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right] &= sh\left[\tau\sqrt{-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]\\ &= sh\left[i\tau\frac{k\pi}{\tau}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]\\ &= i\sin\left[k\pi\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]\\ &= \boxed{i\sin\left[k\pi\frac{x}{L}\right](-1)^{k+1}}\end{aligned}$$

En regroupant les différents termes, on obtient

$$\mathrm{res}V\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right)=\boxed{-\frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)}$$

En posant $G(p) = V(x,p)e^{pt}$, on a

$$\mathrm{res}G\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right) = -\frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)e^{-\frac{k^2\pi^2t^2}{\tau^2}}$$

c) En admettant que les intégrales définies sur les parties circulaires du contour de Bromwich tendent vers 0 lorsque le rayon $R \to \infty$, on obtient en appliquant la formule d'inversion à $V(x,p)$:

$$v(x,t) = 1 - \frac{x}{L} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}e^{-\frac{k^2\pi^2t^2}{\tau^2}}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

d) En utilisant $v(x,0) = 0$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Exercice 3:
1) Des calculs élémentaires donnent le résultat.
2) D'après les propriétés de la transformée de Laplace, on a

$$\begin{aligned}
TL^{-1}\left[Y'(p)\right] &= -ty(t)\\
TL^{-1}\left[Y''(p)\right] &= t^2y(t)\\
TL^{-1}\left[pY''(p)\right] &= \left(t^2y(t)\right)' + \left(t^2y(t)\right)_{t=0}\\
&= 2ty(t) + t^2y'(t)
\end{aligned}$$

On en déduit

$$4t^2y'(t) + (6t-1)\,y(t) = 0$$

3) L'équation précédente s'écrit

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1-6t}{4t^2} = \frac{1}{4t^2} - \frac{3}{2t}$$

d'où

$$Ln\left|y(t)\right| = \frac{-1}{4t} - \frac{3}{2}Ln\left|t\right|$$

et donc

$$y(t) = cste\frac{\exp\left(-\frac{1}{4t}\right)}{t\sqrt{t}}$$