Feuille n°6 : Variable Complexe

Exercice 1 : **Système du second ordre**

Soit le système du second ordre d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$ défini par l'équation aux différences

$$y(n) = x(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$$

On suppose dans ce problème que $a_1^2 < 4a_2$.

1) Déterminer la fonction de transfert de ce système notée $H(z)$. On notera $p_1 = re^{j\theta}$ et $p_2 = re^{-j\theta}$ les pôles de $H(z)$. Quelle est l'expression de $H(z)$ en fonction de r et de θ ? Donner la condition de stabilité du système du second ordre portant sur r puis sur a_2. Représenter le domaine de stabilité dans le plan (a_1, a_2) (sans oublier la contrainte $a_1^2 < 4a_2$).

2) Déterminer la réponse impulsionnelle $h(n)$ du système du second ordre (correspondant à $H(z)$) en fonction de r et de θ.

3) Quelle est l'utilité d'un tel système ?

Exercice 2 :

Soit le système d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$ défini par l'équation aux différences

$$y(n) = x(n) - ax(n-1)$$

1) Déterminer la fonction de transfert de ce système notée $H(z)$. Que pensez vous de la stabilité d'un tel système ?

2) Déterminer la réponse impulsionnelle $h(n)$ associée à $H(z)$.

3) Déterminer et représenter graphiquement la réponse indicielle de ce système.

Exercice 3 :

On considère les équations de récurrence suivantes :

$$y(n) = x(n) + b_1 x(n-1) \qquad n \in \mathbb{N}$$

qui définissent un filtre appelé filtre MA (d'ordre 1) dont le coefficient b_1 est supposé réel.

1) Etude du filtre

Déterminer la fonction de transfert $H(z)$ et la réponse impulsionnelle $h(n)$ de ce filtre.

2) Etude de l'entrée du filtre

On définit la densité spectrale de puissance de la séquence aléatoire (réelle) $x(n)$ par

$$S_x(z) = TZ\left[C_x(k)\right] \text{ avec } C_x(k) = E\left[x(n)\,x(n-k)\right]$$

Déterminer $S_x(z)$ lorsque :

- $C_x(k) = \sigma^2 \delta(k)$
- $C_x(k) = a^k u(k)\,, |a| < 1$

3) Etude de la sortie du filtre

- Déterminer $C_y(k)$ en fonction des $C_x(i)$.
- En déduire $S_y(z)$ en fonction de $S_x(z)$.

Vérifier que

$$S_y(z) = S_x(z) H(z) H\left(z^{-1}\right)$$

4) Etude des liaisons entre l'entrée et la sortie du filtre
Déterminer $C_{yx}(k) = E[y(n)x(n-k)]$ en fonction des $C_x(i)$ et montrer que

$$S_{yx}(z) = S_x(z) H(z)$$